Задача A. Округление вверх

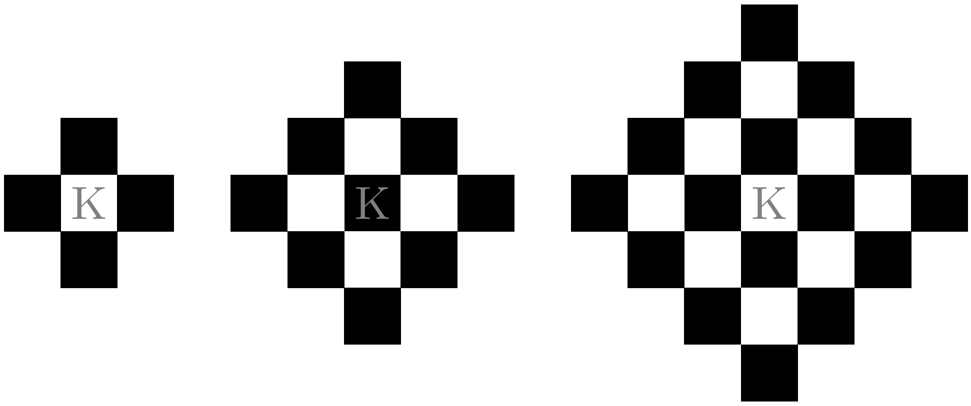
Эта задача была разобрана на уроке. Надо вывести `(a + b - 1) / b` для `C++`, либо `(a + b - 1) // b` для `Python`

Задача B. Монеты для друзей

Заметим, что нам разрешают вывести любое решение. Одним из таких решений можно придумать $n + 1$. Всем раздадим по 1 монете и останется еще одна.

Задача C. Камень в море

Рассмотрим рисунки для $T = 1$, $T = 2$ и $T = 3$, приведенные ниже. Внимательно посмотрев на них, уже можно увидеть закономерность: количество клеток, занятых волнами спустя T секунд после броска камня, равно $(T+1)^2$: на каждом рисунке изображены $T+1$ диагоналей, в каждой из которых находятся $T+1$ черных клеток.



Однако, можно строго доказать нашу догадку. Заметим, что в зависимости от четность T центральная клетка либо содержит, либо не содержит волны. Докажем по индукции, что ответ равен $(T+1)^2$ для четных и нечетных T по-отдельности.

Рассмотрим нечетные значения T. База индукции: $T = 1$, ответ равен $(T+1)^2 = 4$. Выполним переход индукции. Пусть для некоторого T ответ равен $(T+1)^2$. Докажем теперь, что спустя $T+2$ секунд после броска камня ответ будет равен $(T+3)^2$.

Заметим, что при увеличении T на два на рисунке появляется дополнительная «рамка», состоящая из волн. Нетрудно понять, что для картины волн спустя T секунд количество клеток «рамки» равно $4T$.

Таким образом, спустя $T+2$ секунды количество волн будет равно:

$$(T+1)^2 + 4(T+2) = T^2 + 2T + 1 + 4T + 8 = T^2 + 6T + 9 = (T+3)^2.$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать утверждение для четных значений T.

При решении следует пользоваться 64-битным типом данных, так как ответ может быть достаточно большим.

Сложность: $\mathcal{O}(1)$.

Задача D. Укладка асфальта

Для начала посчитаем количество перекрестков. Оно равно $(N+1)^2$, так как каждый перекресток образован пересечением вертикальной и горизонтальной дороги.

Теперь нужно посчитать, сколько фрагментов дорог, соединяющих соседние перекрестки нужно покрыть асфальтом. Нетрудно понять, что таких фрагментов должно быть $(N+1)^2 - 1$. Каждый такой участок имеет длину K. Таким образом, суммарная длина дорог, покрытых асфальтом, равна $K \cdot ((N+1)^2 - 1)$.

Также нужно не забыть воспользоваться 64-битным типом данных, так как число в ответе получается довольно большим.

Задача E. Компьютеры и розетка

Докажем, что ответ или единственный или подходит ровно две точки.

Пусть $max(x) - min(x)$ — четное число. Тогда ответ единственный и равен $\frac{max(x)+min(x)}{2}$. И расстояние для крайних точек в порядке сортировки будет одинаковое. А для центральной меньше, чем для крайних. Если мы подвинем точку в левую сторону, то увеличится расстояние до точки с максимальной координатой. Если в правую, то увеличится расстояние до точки с минимальной координатой. А значит при изменении координаты ответ ухудшится.

Пусть $max(x) - min(x)$ — нечетное число. На самом деле предыдущее рассуждение верно, но в задаче попросили найти точку с целочисленными координатами, поэтому с ответ возьмем любую ближайшую точку к $\frac{max(x)+min(x)}{2}$, например $\left\lfloor \frac{max(x)+min(x)}{2} \right\rfloor$

Задача F. Изготовление деталей

Для решения первых двух подзадач можно просто моделировать процесс, описанный в условии. На первом шаге мы имеем n деталей и $m = n \cdot b$ опилок. Из них изготавливаем $k = \lfloor m/a \rfloor$ деталей, а опилок остается $m = (m \mod a) + k \cdot b$. Добавляем число k к общему числу изготовленных деталей, и продолжаем действия до тех пор, пока масса оставшихся опилок m не станет меньше массы, необходимой для изготовления одной детали a. Данное решение не проходит ограничения по времени в случае, когда n большое, а разница $(a - b)$ мала.

Решение на полный балл. Будем считать общее количество имеющегося сплава. Изначально его $n \cdot a$ грамм. Заметим, что при изготовлении одной детали количество сплава уменьшается на $(a - b)$ грамм. Но также нужно учесть, что для изготовления последней детали нам нужно как минимум a грамм сплава. Значит, нам нужно найти максимальное k такое, что после изготовления $(k - 1)$ детали останется хотя бы a грамм, то есть $n \cdot a - (k - 1) \cdot (a - b) \geqslant a$. Перепишем неравенство в виде $k \cdot (a - b) \leqslant n \cdot a - b$. Максимальным значением k, удовлетворяющим этому условию, будет $\lfloor (n \cdot a - b)/(a - b) \rfloor$, это и есть ответ. Единственный случай, который нужно учесть особым образом — это $n = 0$ (тогда ответом, разумеется, будет 0).

Задача G. Компьютерный вирус

Автор задачи: Инесса Шуйкова, разработчик: Михаил Кондрашин

Когда одно из измерений равно 1, необходимо выбирать клетки по парам, чередуя через одну пустую. Ответ тогда равен (если $m = 1$) $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$, так как каждый раз используется не более трех новых клеток, а в последний раз может быть занято две клетки (если n дает остаток 2 при делении на 3).

Теперь рассмотрим общий случай и горизонтальное расположение объектов. Заметим, что выгодно размещать объекты на строках через одну пустую, при этом использовать строки надо с самой первой. Иначе можно все строки поднять на одну вверх, из-за чего ответ не ухудшится, а может быть и улучшится, так как могут появиться новые места. Тогда в каждой строке можно использовать $\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$ мест. А всего строк будет тогда доступно $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Тогда ответ для горизонтального расположения будет равен $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$. Вертикальное размещение объектов рассматривается аналогично.

Задача H. Кладоискатель

Рассмотрим решение первой подзадачи, когда входные данные не превосходят 100. Из условия следует, что искомое значение x находится в следующих границах: его минимальное значение не меньше наименьшего из чисел: $-r_1$ и $a - r_2$, а максимальное значение не больше наибольшего из чисел r_1 и $a + r_2$.

Глубина залегания монетки может принимать значения от 0 до наименьшего из r_1 и r_2.

Переберём все точки плоскости (x, y) в этих границах и найдём, для какой из точек выполнятся оба условия $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $(a - x)^2 + y^2 = r_2^2$ (они являются уравнениями двух окружностей).

Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
```

```
r2 = int(input())
min_x = min(-r1, a - r2)
max_x = max(r1, a + r2)
for x in range (min_x, max_x + 1):
    for y in range(0, -max(r1, r2), -1):
        if x ** 2 + y ** 2 == r1 ** 2 and (x - a) ** 2 + y ** 2 == r2 ** 2:
            print(x)
            print(y)
```

Для решения второй подзадачи (входные числа не превосходят 10^5) избавимся от вложенного цикла по значению y. По-прежнему перебираем x в пределах, описанных в решении для первой подзадачи.

Для выбранного x значение y^2 равно $r_1^2 - x^2$ с одной стороны и $r_2^2 - (a-x)^2$ с другой стороны. Если эти два значения совпали — мы нашли подходящее решение, в качестве y нужно взять $y = -\sqrt{r_1^2 - x^2}$. Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
r2 = int(input())
x_min = min(-r1, a - r2)
x_max = max(r1, a + r2)
for x in range(x_min, x_max):
    y = r1 ** 2 - x ** 2
    if r2 ** 2 - (a - x) ** 2 == y:
        print(x)
        print(-int(y ** 0.5))
```

Полное решение имеет сложность $O(1)$. Пусть (x, y) – искомые координаты.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2, \\ (a-x)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$$

следует, что (выразим y^2 из первого уравнения и подставим во второе)

$$(a-x)^2 + r_1^2 - x^2 = r_2^2,$$

$$2ax = r_1^2 - r_2^2 + a^2,$$

откуда

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + a^2}{2a}.$$

Теперь выразим y:

$$y = -\sqrt{r_1^2 - x^2}.$$

Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
r2 = int(input())
x = (r1 ** 2 - r2 ** 2 + a ** 2) // (2 * a)
y = -int((r1 ** 2 - x ** 2) ** 0.5)
print(x)
print(y)
```