Задача A. Денежные деревья

Посадим деревья на поле в шахматном порядке. Тогда у каждой клетки, где посажено дерево, соседями будут пустые клетки. Клеток одного цвета будет $\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \rfloor$, а другого цвета — $\lceil \frac{n \cdot m}{2} \rceil$.

Так как нам необходимо максимизировать количество деревьев, то ответом на задачу будет $\lceil \frac{n \cdot m}{2} \rceil$.

Фрагмент решения на языке C++:

```
int n, m;
cin >> n >> m;
cout << (1ll * n * m + 1) / 2;
```

Задача B. Самолёт

Данную задачу можно решать разными способами.

Первый способ. Рассмотрим остатки от деления числа N на 6. Если остаток равен 0, то никого пропускать не надо, так как Алиса и Борис получат места `A` и `B`. Если остаток от деления равен 1, нужно пропустить трёх человек, чтобы получить места `E` и `F`. Аналогично, если остаток равен 2, нужно пропустить двух человек, если остаток равен 3 — одного человека, если остаток равен 4, то никого пропускать не нужно. Последний случай — остаток равен 5. В этом случае нужно пропустить одного человека и получить места `A` и `B`.

Второй способ. Так как ответ не превосходит 3, можно пропускать по одному человеку и проверять требование к текущему месту Алисы и Бориса.

Асимптотика обоих решений: $O(1)$.

Задача C. Укладка асфальта

Для начала посчитаем количество перекрестков. Оно равно $(N+1)^2$, так как каждый перекресток образован пересечением вертикальной и горизонтальной дороги.

Теперь нужно посчитать, сколько фрагментов дорог, соединяющих соседние перекрестки нужно покрыть асфальтом. Нетрудно понять, что таких фрагментов должно быть $(N+1)^2 - 1$. Каждый такой участок имеет длину K. Таким образом, суммарная длина дорог, покрытых асфальтом, равна $K \cdot ((N+1)^2 - 1)$.

Также нужно не забыть воспользоваться 64-битным типом данных, так как число в ответе получается довольно большим.

Задача D. Компьютерный вирус

Автор задачи: Инесса Шуйкова, разработчик: Михаил Кондрашин

Когда одно из измерений равно 1, необходимо выбирать клетки по парам, чередуя через одну пустую. Ответ тогда равен (если $m = 1$) $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$, так как каждый раз используется не более трех новых клеток, а в последний раз может быть занято две клетки (если n дает остаток 2 при делении на 3).

Теперь рассмотрим общий случай и горизонтальное расположение объектов. Заметим, что выгодно размещать объекты на строках через одну пустую, при этом использовать строки надо с самой первой. Иначе можно все строки поднять на одну вверх, из-за чего ответ не ухудшится, а может быть и улучшится, так как могут появиться новые места. Тогда в каждой строке можно использовать $\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$ мест. А всего строк будет тогда доступно $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Тогда ответ для горизонтального расположения будет равен $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$. Вертикальное размещение объектов рассматривается аналогично.

Задача E. Кладоискатель

Рассмотрим решение первой подзадачи, когда входные данные не превосходят 100. Из условия следует, что искомое значение x находится в следующих границах: его минимальное значение не меньше наименьшего из чисел: $-r_1$ и $a - r_2$, а максимальное значение не больше наибольшего из чисел r_1 и $a + r_2$.

Глубина залегания монетки может принимать значения от 0 до наименьшего из r_1 и r_2.

Переберём все точки плоскости (x, y) в этих границах и найдём, для какой из точек выполнятся оба условия $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $(a - x)^2 + y^2 = r_2^2$ (они являются уравнениями двух окружностей).

Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
r2 = int(input())
min_x = min(-r1, a - r2)
max_x = max(r1, a + r2)
for x in range (min_x, max_x + 1):
    for y in range(0, -max(r1, r2), -1):
        if x ** 2 + y ** 2 == r1 ** 2 and (x - a) ** 2 + y ** 2 == r2 ** 2:
            print(x)
            print(y)
```

Для решения второй подзадачи (входные числа не превосходят 10^5) избавимся от вложенного цикла по значению y. По-прежнему перебираем x в пределах, описанных в решении для первой подзадачи.

Для выбранного x значение y^2 равно $r_1^2 - x^2$ с одной стороны и $r_2^2 - (a - x)^2$ с другой стороны. Если эти два значения совпали — мы нашли подходящее решение, в качестве y нужно взять $y = -\sqrt{r_1^2 - x^2}$. Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
r2 = int(input())
x_min = min(-r1, a - r2)
x_max = max(r1, a + r2)
for x in range(x_min, x_max):
    y = r1 ** 2 - x ** 2
    if r2 ** 2 - (a - x) ** 2 == y:
        print(x)
        print(-int(y ** 0.5))
```

Полное решение имеет сложность $O(1)$. Пусть (x, y) – искомые координаты.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2, \\ (a - x)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$$

следует, что (выразим y^2 из первого уравнения и подставим во второе)

$$(a - x)^2 + r_1^2 - x^2 = r_2^2,$$

$$2ax = r_1^2 - r_2^2 + a^2,$$

откуда

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + a^2}{2a}.$$

Теперь выразим y:

$$y = -\sqrt{r_1^2 - x^2}.$$

Пример такого решения.

```
a = int(input())
r1 = int(input())
r2 = int(input())
```

```
x = (r1 ** 2 - r2 ** 2 + a ** 2) // (2 * a)
y = -int((r1 ** 2 - x ** 2) ** 0.5)
print(x)
print(y)
```

Задача F. Компьютеры и розетка

Докажем, что ответ или единственный или подходит ровно две точки.

Пусть $max(x) - min(x)$ — четное число. Тогда ответ единственный и равен $\frac{max(x)+min(x)}{2}$. И расстояние для крайних точек в порядке сортировки будет одинаковое. А для центральной меньше, чем для крайних. Если мы подвинем точку в левую сторону, то увеличится расстояние до точки с максимальной координатой. Если в правую, то увеличится расстояние до точки с минимальной координатой. А значит при изменении координаты ответ ухудшится.

Пусть $max(x) - min(x)$ — нечетное число. На самом деле предыдущее рассуждение верно, но в задаче попросили найти точку с целочисленными координатами, поэтому с ответ возьмем любую ближайшую точку к $\frac{max(x)+min(x)}{2}$, например $\left\lfloor \frac{max(x)+min(x)}{2} \right\rfloor$

Задача G. Изготовление деталей

Для решения первых двух подзадач можно просто моделировать процесс, описанный в условии. На первом шаге мы имеем n деталей и $m = n \cdot b$ опилок. Из них изготавливаем $k = \lfloor m/a \rfloor$ деталей, а опилок остается $m = (m \mod a) + k \cdot b$. Добавляем число k к общему числу изготовленных деталей, и продолжаем действия до тех пор, пока масса оставшихся опилок m не станет меньше массы, необходимой для изготовления одной детали a. Данное решение не проходит ограничения по времени в случае, когда n большое, а разница $(a - b)$ мала.

Решение на полный балл. Будем считать общее количество имеющегося сплава. Изначально его $n \cdot a$ грамм. Заметим, что при изготовлении одной детали количество сплава уменьшается на $(a - b)$ грамм. Но также нужно учесть, что для изготовления последней детали нам нужно как минимум a грамм сплава. Значит, нам нужно найти максимальное k такое, что после изготовления $(k - 1)$ детали останется хотя бы a грамм, то есть $n \cdot a - (k - 1) \cdot (a - b) \geqslant a$. Перепишем неравенство в виде $k \cdot (a - b) \leqslant n \cdot a - b$. Максимальным значением k, удовлетворяющим этому условию, будет $\lfloor (n \cdot a - b)/(a - b) \rfloor$, это и есть ответ. Единственный случай, который нужно учесть особым образом — это $n = 0$ (тогда ответом, разумеется, будет 0).

Задача H. Изменения температуры

Авторы задачи: Александр Безручко, Екатерина Глеч, Анна Кличенко, Анастасия Романова, Айдар Фасиков, Галина Шаповалова, разработчик: Михаил Кондрашин

Формально условие задачи можно представить следующим образом. У нас есть целые числа x и y, к которым мы **по очереди** применяем операции двух типов:

1. Из x вычесть a, к y прибавить a;

2. К x прибавить b, из y вычесть b;

При этом мы обязаны начать с операции первого типа и сделать четное количество операций. Нужно сделать числа x и y равными за минимальное количество операций.

Частичное решение

Частичное решение, набирающее 40 баллов, предполагает следующую идею.

При данных ограничениях можно показать, что при наличии ответа, ответ не превосходит 100 000. Будем по очереди выполнять операции. Если в какой-то момент значения x и y стали равны, нужно проверить, что выполненное количество операций четно. Если значение x не стало равно значению y, то ответ не существует.

Время работы: $\mathcal{O}(\max(x, y))$.

Полное решение

Для полного решения объединим две операции в одной действие: к числу x прибавить $b - a$, а к числу y прибавить $a - b$.

Обозначим количество действий за k и представим условие в виде уравнения:

$$x + k \cdot (b - a) = y + k \cdot (a - b)$$

Выразим k из уравнения: $k = \dfrac{y - x}{2 \cdot (b - a)}$.

1. Если $a = b$, то знаменатель дроби равен нулю. Тогда имеют место два случая:
   (a) $x = y$, тогда ответ «`YES`», и мы сделали 0 действий.
   (b) $x \neq y$, тогда ответ «`NO`».
2. Если $k < 0$, то ответ «`NO`», потому что мы не можем сделать отрицательного количества действий.
3. Иначе ответ «`YES`» и мы сделали k действий.

Если мы нашли подходящее k, то его нужно умножить на два, так как за k мы обозначили количество действий, а количество операций в два раза больше, чем количество действий.

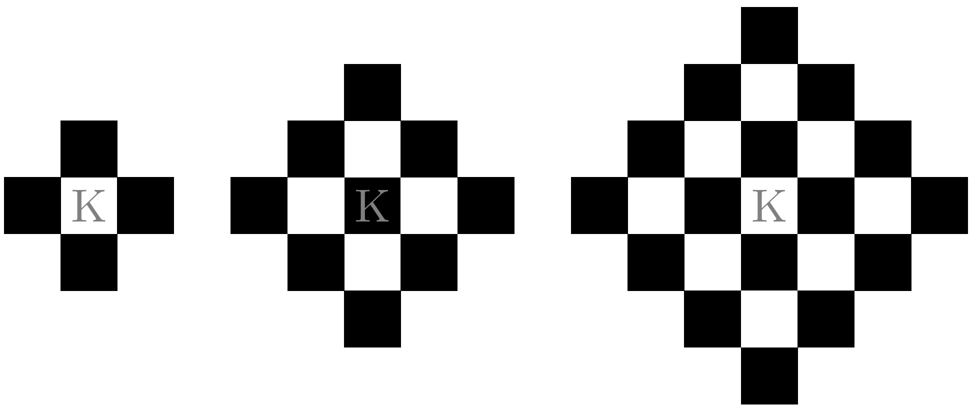
Время работы: $\mathcal{O}(1)$.

Задача I. Монеты для друзей

Заметим, что нам разрешают вывести любое решение. Одним из таких решений можно придумать $n + 1$. Всем раздадим по 1 монете и останется еще одна.

Задача J. Камень в море

Рассмотрим рисунки для $T = 1$, $T = 2$ и $T = 3$, приведенные ниже. Внимательно посмотрев на них, уже можно увидеть закономерность: количество клеток, занятых волнами спустя T секунд после броска камня, равно $(T + 1)^2$: на каждом рисунке изображены $T + 1$ диагоналей, в каждой из которых находятся $T + 1$ черных клеток.



Однако, можно строго доказать нашу догадку. Заметим, что в зависимости от четность T центральная клетка либо содержит, либо не содержит волны. Докажем по индукции, что ответ равен $(T + 1)^2$ для четных и нечетных T по-отдельности.

Рассмотрим нечетные значения T. База индукции: $T = 1$, ответ равен $(T + 1)^2 = 4$. Выполним переход индукции. Пусть для некоторого T ответ равен $(T + 1)^2$. Докажем теперь, что спустя $T + 2$ секунд после броска камня ответ будет равен $(T + 3)^2$.

Заметим, что при увеличении T на два на рисунке появляется дополнительная «рамка», состоящая из волн. Нетрудно понять, что для картины волн спустя T секунд количество клеток «рамки» равно $4T$.

Таким образом, спустя $T+2$ секунды количество волн будет равно:

$$(T+1)^2+4(T+2)=T^2+2T+1+4T+8=T^2+6T+9=(T+3)^2.$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать утверждение для четных значений T.

При решении следует пользоваться 64-битным типом данных, так как ответ может быть достаточно большим.

Сложность: $\mathcal{O}(1)$.