Задача A. Глобальное потепление

Понятно, что если мы добавляем число на отрезке $[l;r]$, то можно заменить эту операцию прибавлением на суффиксе (если число $x \geqslant 0$, то добавляем x на суффиксе $[l;n]$, а если < 0, то добавляем $-x$ на суффиксе $(r,n]$).

Значит, нам достаточно операции «прибавить $x \geqslant 0$ на суффиксе массива», чтобы получить корректный ответ.

Чтобы решить такую задачу, посчитаем для каждого i от 1 до n длину НВП, которая начинается в i и продолжается на суффиксе. Теперь переберем какой-то префикс массива длины L. Для каждого x посчитаем длину НВП на этом префиксе, оканчивающуюся на элемент равный x. Предположим, что элемент $L+1$ лежит в оптимальной НВП. Тогда на суффиксе $[L+1;n]$ мы уже знаем длину НВП (мы ее предподсчитали), а на префиксе $[1;L]$ нам необходимо найти длину НВП, оканчивающуюся на элемент $< a_i + x$ (так как на суффиксе мы можем прибавить x, меньшее число прибавлять не выгодно). Это можно сделать при помощи дерева отрезков/фенвика или бинпоиском, если искать НВП при помощи него.

$O(n \log n)$

Задача B. Сложная задачка

Несложно понять, что длина ответа не превосходит $\frac{\min(n,m)}{k} + 1$.

Сделаем $dp[len][i]$ — максимальный индекс последнего элемента **первого** вхождение в массив B подпоследовательности длины len, если максимальный индекс **первого** вхождения подпоследовательности в массив A равен i.

Проиллюстрируем на примере, что подразумевается под индексом последнего элемента первого вхождения.

$A = [\mathbf{1}, \mathbf{2}, 2, \mathbf{3}, 3]$

$B = [\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 3]$

$P = [1, 2, 3]$

P — подпоследовательность, жирным выделены ее первые вхождения, индексы (в 0-индексации) получились 3 и 2 для массивов A и B, соответственно.

Предподсчитаем массивы $nextA[i][j]$ и $nextB[i][j]$ — наименьший индекс t, что $t > i$ и A_t (B_t) $= j$. На это мы потратим $O((n+m)k)$ времени.

Теперь несложно посчитать нашу динамику: для текущего состояния (len, i) достаточно перебрать следующий символ c подпоследовательности за $O(k)$ и пересчитаться:

$dp[len+1][nextA[i][c]] \max = nextB[dp[len][i]][c]$

Динамика будет разботать за $O(\frac{n}{k} \cdot m \cdot k) = O(nm)$.

Задача C. Путь на Манхеттене

Воспользуемся деревом отрезков. В вершине достаточно хранить:

- ответ, если на отрезке не была пропущена ни одна точка
- ответ, если на отрезке была пропущена одна точка, и она самая левая
- ответ, если на отрезке была пропущена одна точка, и она самая правая
- ответ, если на отрезке была пропущена одна точка, и она строго внутри отрезка (не на краях)

Такую динамику легко пересчитывать.

Задача D. Произведение цифр

Достаточно написать $dp[len][0/1][prod]$ и поддерживать состояния в `std::map`. Это стандартное дп по цифрам: 0/1 отвечает за то, равен ли текущий префикс префиксу числа n, или же уже строго меньше. Пересчитывать легко за $O(1)$ — просто перебираем следующую цифру. Оценим число различных состояний: нам интересно, сколько есть достижимых произведений не более 10^9, представимых в виде произведения не более 18 цифр. Это легко сделать при помощи рекурсивного перебора. Получается 4731 достижимых произведений, поэтому динамика работает быстро.

Задача E. Странное разбиение

$dp[i][j]$ — количество разбиений префикса массива длины i на j подотрезков. Легко пересчитываться за $O(n)$. Тогда итоговая асимптотика составит $O(n^3)$. Остается заметить, что $dp[i][j]$ нужно обновить через все $dp[k][j-1]$, где $k < i$ и $pref[i]$ имеет такой же остаток по модулю j, как и $pref[k]$. Значит, можно просто поддерживать необходимую сумму параллельно с пересчетом динамики (перебираем состояния сначала по j, потом по i). Итоговая асимптотика $O(n^2)$.

Задача F. Деревянный патруль

Аналогичная задача разбиралась на лекции. Используется $dp[v][k][0/1/2]$ — количество способов расставить охранников в поддереве вершины v, чтобы ровно k вершин оказались защищенными и флаг $0/1/2$ — защищена ли вершина v. Тогда легко пересчитывать такую динамику для вершины v за $sz[s_1] + sz[s_1] \cdot sz[s_2] + (sz[s_1] + sz[s_2]) \cdot sz[s_3] + \ldots$, где s_i — i-й сын вершины v. Несложно видеть, что тогда итоговая асимптотика составит $O(n^2)$.