

### Обход в глубину

**Задача 1.** Дано корневое дерево на  $n$  вершинах. Вам нужно ответить на  $q$  запросов вида «даны вершины  $u, v$ , скажите является ли  $u$  предком  $v$ ». Ответьте на все запросы за  $O(n + q)$ .

**Задача 2.** Дано корневое дерево на  $n$  вершинах. В вершине  $v$  записано значение  $a_v$ . Поступают  $q$  запросов вида  $(v, d)$ , требующих сообщить сумму значений в вершинах  $u$ , таких что  $u$  находится в поддереве  $v$  и расстояние от  $u$  до  $v$  равняется  $d$ . Ответьте на все запросы за  $O(q \log n)$

**Задача 3.** Существует некоторый массив  $a$  размера  $n$ . Дано  $q$  условий вида  $(l, r, x)$ , означающих, что сумма на полуинтервале  $[l, r)$  равняется  $x$ . За  $O(n + q)$  найдите массив, подходящий под эти условия, или определите, что такого массива не существует.

**Задача 4.** Найдите цикл четной длины в графе на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах за  $O(n + m)$

**Задача 5.** Найдите количество таких ребер  $(u, v)$ , что после удаление этого ребра граф будет двудольным, за  $O(n + m)$

### Топологическая сортировка. Конденсация

**Задача 6.** Пусть в алгоритме поиска компоненты сильной связности обход в глубину запускался не на транспонированном графе, а на исходном. Приведите пример графа, на котором данный алгоритм найдет компоненты сильной связности неверно.

**Задача 7.** Дан ориентированный граф. Алиса и Боб хотят выписать топологическую сортировку. Они ходят по очереди. Алиса ходит первой. Алиса хочет выписать лексикографически минимальную топологическую сортировку, Боб хочет выписать лексикографически максимальную топологическую сортировку. За  $O(n \log n)$  определите, в каком порядке будут выписаны вершины.

**Задача 8.** Даны  $n$  строк из английских букв. Нужно найти такое переименование букв (перестановку), чтобы массив из строк был отсортирован в лексикографическом порядке.

### Динамика на ориентированном ациклическом графе

**Задача 9.** Дан ориентированный ациклический граф на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Также дана последовательность  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Найдите количество путей от  $v_1$  до  $v_k$ , проходящих через  $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$  в некотором порядке по модулю  $C$

- за  $O(k(n + m))$
- за  $O(n + m)$

**Задача 10.** Дан ориентированный граф  $G$  на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Назовем его *транзитивным замыканием* граф  $T(G)$ , в котором ребро между  $u$  и  $v$  есть тогда и только тогда, когда в графе  $G$  есть путь от  $u$  к  $v$ . Множество вершин  $U$  назовем *кликой*, если для любых двух различных вершин  $v$  и  $u$  из  $U$  есть ребро либо из  $v$  в  $u$ , либо из  $u$  в  $v$ , либо в обе стороны. Найдите размер наибольшей клики в графе  $T(G)$  за  $O(n + m)$

**Задача 11.** Дан взвешенный ориентированный ациклический граф на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Найти сумму длин всех простых путей в данном графе по модулю  $C$  за  $O(n + m)$ .

### Динамика на поддеревьях

**Задача 12.** Дано дерево на  $n$  вершинах. Найти минимальное число ребер, после удаления которых хотя бы у одной компоненты связности размер будет равно  $p$ .

- за  $O(n^3)$
- за  $O(n^2)$

**Задача 13.** Дано дерево с весами на ребрах. Нужно отвечать на запросы: вес ребра  $(u, v)$  временно увеличивается на  $x$ , нужно найти диаметр дерева после изменения.

Ответить на  $q$  запросов за  $O(n + q)$ .

## Разное

**Задача 14.** Предложите алгоритм поиска диаметра в дереве за  $O(n)$ , не используя методы динамического программирования

**Задача 15.** Дано дерево на  $n$  вершинах. Найти вершины  $a, b, c$  такие, что количество ребер, принадлежащих хотя бы одному из путей из  $a$  в  $b$ , из  $a$  в  $c$  и из  $b$  в  $c$ , максимально. Время работы –  $O(n + m)$